

Varianta 98

Subiectul I

a) $AB = 3$.

b) $m = 2, n = 6$.

c) B, C și D sunt coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, adevărat.

d) $S_{EDF} = \frac{3}{2}$.

e) $\cos^4 45^\circ = \frac{1}{4}$.

f) $(1 - 2i)^2 = -3 - 4i$.

Subiectul II

1.

a) $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 = 364$.

b) $g(4) = 1$.

c) suma coeficienților este 2^4 .

d) $x_1 = 1$ și $x_2 = \frac{1}{5}$.

e) $x_1 = 1$ și $x_2 = 4$.

2.

a) $f(0) = 1$.

b) $f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}, \forall x \in (-1, \infty)$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3}{4}$.

d) $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} + \ln 2$.

e) $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \geq 0, \forall x \in [0, \infty)$. Deci funcția f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

Subiectul III

a) $f(1) = 2$.

b) $f(1) + f(2) + \dots + f(10) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2 \cdot 10 = 110$.

c) Arătăm că funcția f este bijectivă.

Injectivitatea: $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ cu $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Deci funcția f este injectivă.

Surjectivitatea: $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}: f(x) = y$.

$f(x) = y \Rightarrow 2x = y \Rightarrow \exists x = \frac{y}{2} \in \mathbf{R}$. Deci funcția f este surjectivă.

Funcția f fiind injectivă și surjectivă este bijectivă.

Dar f bijectivă $\Leftrightarrow f$ inversabilă $\Leftrightarrow \exists f^{-1}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f^{-1}(y) = x$ pentru care $f(x) = y$.

Deducem că $f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$. Deci $f^{-1}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$.

d)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 = f\left(\frac{3}{2}\right).$$

e) Notăm $P(n): f_n(x) = 2^n x, n \in \mathbf{N}^*$.

$$P(1): f_1(x) = 2^1 x \quad (A).$$

Presupunem $P(k)$ propoziție adevărată și demonstrăm că $P(k+1)$ este propoziție adevărată. Deci $f_k(x) = 2^k x$.

$$f_{k+1}(x) = \left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{(k+1) \text{ ori}} \right)(x) = (f_k \circ f)(x) = f_k(f(x)) = 2^k f(x) = 2^k \cdot 2x = 2^{k+1} x.$$

Obținem că $P(k+1)$ este adevărată. Folosind metoda inducției matematice rezultă că $P(n)$ este o propoziție adevărată, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

f) Notăm $P(n): \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & f(n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbf{N}^*$.

Evident $P(1)$ este adevărată.

Presupunem $P(k)$ propoziție adevărată și demonstrăm că $P(k+1)$ este propoziție adevărată.

Deci $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & f(k) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este adevărată. Atunci:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ adevărat.}$$

Din metoda inducției matematice rezultă că $P(n)$ este adevărată, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

g) $1 + f_1(1) + f_2(1) + \dots + f_n(1) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$

Subiectul IV

a) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1, x \in \mathbf{R}.$

b) $\int_1^2 \frac{f'(x)}{x^2} dx = \int_1^2 3dx - 2 \int_1^2 \frac{1}{x} dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left(3x - 2 \ln x + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2} - 2 \ln 2.$

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3}; x_2 = 1.$ Deducem că $f'(x) \geq 0, x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3} \right] \cup [1, \infty)$ și că

$f'(x) \leq 0, x \in \left[-\frac{1}{3}, 1 \right].$ Deci f este crescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{1}{3} \right]$, descrescătoare pe

$\left[-\frac{1}{3}, 1 \right]; f$ crescătoare pe $[1, \infty).$ În concluzie funcția f nu e monotonă pe $\mathbf{R}.$

d) Din punctul **c)** deducem că $x_1 = -\frac{1}{3}$ este punct de maxim local, iar $x_2 = 1$ este punct de minim local.

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 - x^2 - x - 2} = 0.$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{2^x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^{3x}} - \frac{1}{2^{2x}} - \frac{1}{2^x} - 2 \right) = -2.$

g) $f(x) - f(-x) = x^3 - x^2 - x - 2 - (-x^3 - x^2 + x - 2) = 2x^3 - 2x.$

$\int_{\frac{1}{5}}^5 \frac{f(x) - f(-x)}{x^3} dx = \int_{\frac{1}{5}}^5 \left(2 - \frac{2}{x^2} \right) dx = \left(2x + \frac{2}{x} \right) \Big|_{\frac{1}{5}}^5 = 2 \left(5 - \frac{1}{5} \right) + 2 \left(\frac{1}{5} - 5 \right) = 0.$